86 数学

● 理学部　● 工学部

I

(i) (1) 4

(2) $\dfrac{2}{5} \leqq x < \dfrac{11}{25}$

(ii) (3) $\dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

(4) $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}$

(iii) (5) $\dfrac{1}{6}$

(6) $\dfrac{19}{108}$

(iv) (7) $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$

(8) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

【理学部（応用数学科，物理科学科），工学部】

II

(i)

$$f'(x) = \frac{-1}{2-x}$$

$f'(2-\sqrt{e}) = \dfrac{-1}{\sqrt{e}}$ より，ℓ の方程式は

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{\sqrt{e}}(x - (2-\sqrt{e}))$$

整理すると

$$y = -\frac{1}{\sqrt{e}}x + \frac{2}{\sqrt{e}} - \frac{1}{2}$$

答 $y = -\dfrac{1}{\sqrt{e}}x + \dfrac{2}{\sqrt{e}} - \dfrac{1}{2}$

(ii) $\begin{cases} f(2-\sqrt{e}) = g(2-\sqrt{e}) \\ f'(2-\sqrt{e}) = g'(2-\sqrt{e}) \end{cases}$ である。

よって $\begin{cases} \dfrac{1}{2} = a(2-\sqrt{e}-p)^2 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{e}} = 2a(2-\sqrt{e}-p) \end{cases}$ となる。

これを解いて

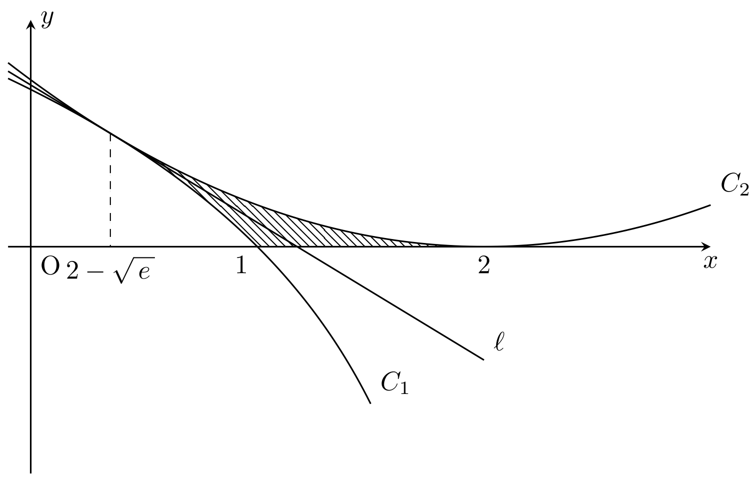
$$(p,\ a) = \left(2,\ \frac{1}{2e}\right)$$

図より，求める面積は

$$\int_{2-\sqrt{e}}^{2} \frac{1}{2e}(x-2)^2dx - \int_{2-\sqrt{e}}^{1} \log(2-x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{6e}(x-2)^3\right]_{2-\sqrt{e}}^{2} + [(2-x)\log(2-x)]_{2-\sqrt{e}}^{1} + \int_{2-\sqrt{e}}^{1} dx$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{e} - 1$$



答 $\dfrac{2}{3}\sqrt{e} - 1$

【理学部（社会数理・情報インスティチュート，化学科，地球圏科学科）】

Ⅱ

(i) $a=\displaystyle\int_1^3 f(x)dx$ とおくと，

$$f(x)=x^3+(3-3a)x^2+2+a$$

よって

$$\begin{aligned} a&=\int_1^3 f(x)dx \\ &=\left[\frac{1}{4}x^4+(1-a)x^3+(2+a)x\right]_1^3 \\ &=-24a+50 \end{aligned}$$

以上から $a=2$

答 2

(ii) (i) より

$$f(x)=x^3-3x^2+4$$

ここで

$$g(x)=f(x)-(-3x^2+6x)=x^3-6x+4$$

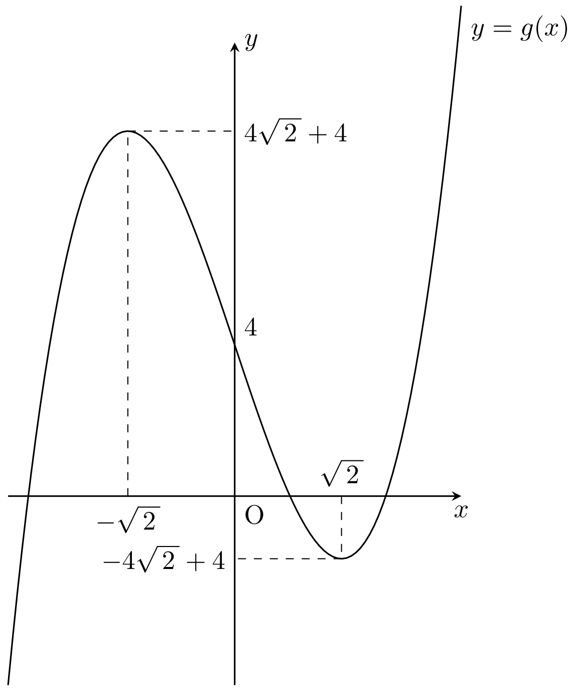
とおく。このとき，$y=g(x)$ と $y=k$ の共有点が 2 個以上あればよい。

$$g'(x)=3x^2-6=3(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$$

を解くと $x=\pm\sqrt{2}$ となる。
$g(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$g(x)$ は $x=-\sqrt{2}$ で極大値 $4\sqrt{2}+4$，$x=\sqrt{2}$ で極小値 $-4\sqrt{2}+4$ をとる。
図より，$y=g(x)$ と $y=k$ の共有点が 2 個以上となる k の範囲は $-4\sqrt{2}+4\leqq k\leqq 4\sqrt{2}+4$ である。



答 $-4\sqrt{2}+4\leqq k\leqq 4\sqrt{2}+4$