85　数　学

I

(i) (1) $(-10a,\ 8a)$　　(2) $0,\ 9$

(ii) (3) 6　　(4) 21

(iii) (5) $0,\ -\dfrac{8}{3}$　　(6) $4-2\sqrt{5} < m \leqq 0$

II

(i) (1) $\dfrac{3}{5}$　　(2) $\dfrac{3\sqrt{10}}{4}$

(ii) (3) $(-1,\ -6)$　　(4) $\dfrac{244}{9}$

III

(i) $f'(x) = 3x^2 - 4ax + a^2 = (3x-a)(x-a)$ より $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{3}, a$ となる。増減表は

x	$\cdots$	$\dfrac{a}{3}$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 $\dfrac{4}{27}a^3$	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

になる。よって $f(x)$ は

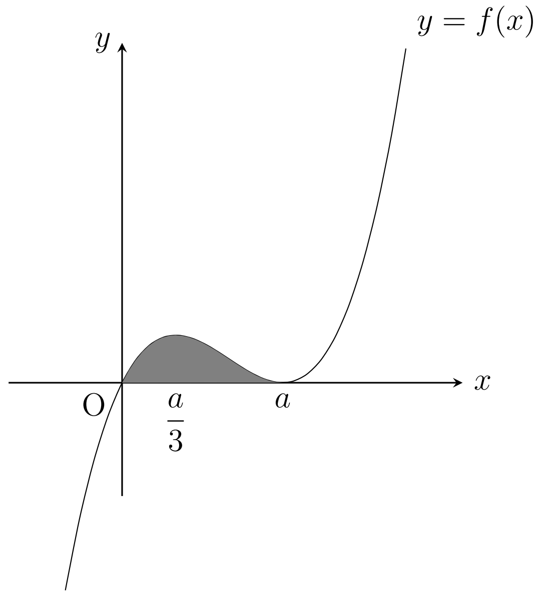
$x = \dfrac{a}{3}$ のとき極大値 $\dfrac{4}{27}a^3$, $x = a$ のとき極小値 0 をとる。

答 極大値 $\dfrac{4}{27}a^3\ \left(x = \dfrac{a}{3}\right)$, 極小値 $0\ (x = a)$

(ii) (i) より, 曲線 $y = f(x)$ のグラフは下図のようになる。したがって囲まれた部分の面積 $S(a)$ の値は

$$
\begin{aligned}
S(a) &= \int_0^a f(x)dx \\
&= \int_0^a (x^3 - 2ax^2 + a^2x)dx \\
&= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}ax^3 + \frac{a^2}{2}x^2\right]_0^a = \frac{a^4}{12}
\end{aligned}
$$

条件より $\dfrac{a^4}{12} = \dfrac{1}{3}$ なので $a > 0$ より $a = \sqrt{2}$ を得る。



答 $\sqrt{2}$