一般選抜（前期日程）　2026年2月3日

⑭ 数　学

I

(i) (1) $\dfrac{6}{11}$　(2) $\dfrac{2}{3}$

(ii) (3) 2　(4) 5

(iii) (5) $x+3y=10,\ 3x-y=10$　(6) $10-\dfrac{5}{2}\pi$

II

(i) (1) $(-8,\ -5)$　(2) $2,\ -1,\ \dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$

(ii) (3) $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$　(4) $\sqrt{3}$

III

(i) $y=x^2-x^3$ より，$y'=2x-3x^2=x(2-3x)$ であり, $x=\dfrac{2}{3}$ のとき, $y=\dfrac{4}{27}$ である。増減表は下のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}$	$\cdots$
y	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$	極大 $\dfrac{4}{27}$	$\searrow$

したがって 3 個の共有点をもつための k の範囲は

$$0<k<\frac{4}{27}$$

である。

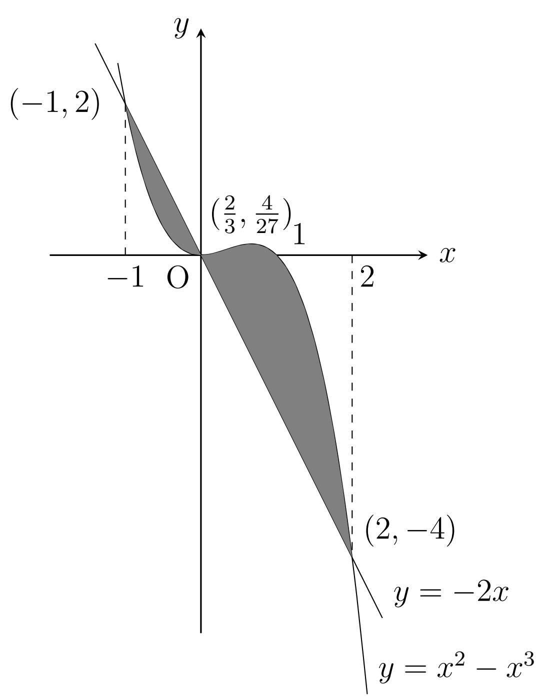
答 $0<k<\dfrac{4}{27}$

(ii) $y=x^2-x^3$ と $y=-2x$ との交点の x 座標を求めると

$$\begin{aligned}
&-x^3+x^2=-2x\\
&\iff x^3-x^2-2x=0\\
&\iff x(x^2-x-2)=0\\
&\iff x(x-2)(x+1)=0
\end{aligned}$$

から $x=-1,\ 0,\ 2$ である。したがって求める面積 S は

$$\begin{aligned}
S&=\int_{-1}^{0}\left(x^3-x^2-2x\right)dx+\int_{0}^{2}\left(-x^3+x^2+2x\right)dx\\
&=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{0}^{2}\\
&=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}
\end{aligned}$$



答 $\dfrac{37}{12}$

⑮　数　学

I

(i) (1) $12\sqrt{3}+8\sqrt{6}$　　(2) -4

(ii) (3) $\dfrac{3}{65}$　　(4) $\dfrac{27}{35}$

(iii) (5) $(1,\ 3)$　　(6) $m \leqq -3,\ 3 \leqq m$

II

(i) (1) 4　　(2) $1 < x < 4$

(ii) (3) $\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$　　(4) $\sqrt{10}-1$

III

(i) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ なので

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = (3x-1)(x-1) = 0$

を解くと $x = \dfrac{1}{3}, 1$ となる。したがって増減表は

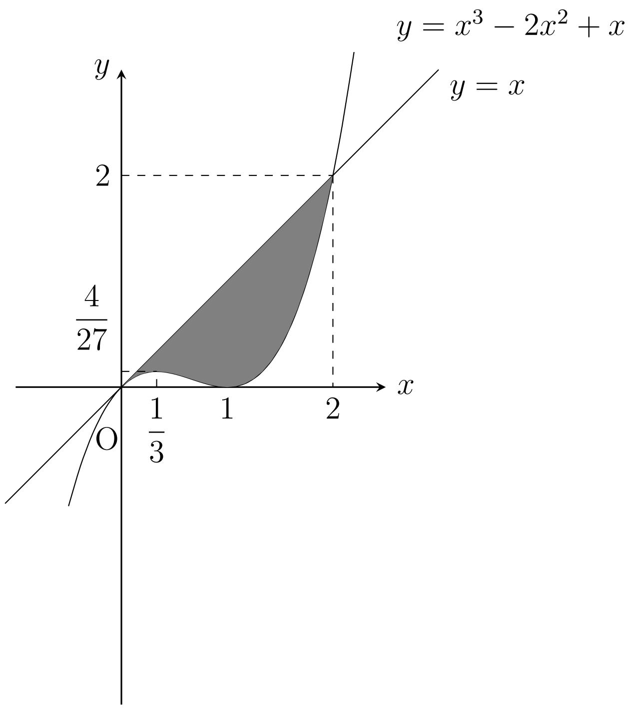
x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

となって, $x = \dfrac{1}{3}$ のときに極大値 $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{4}{27}$ をとる。

答　$\alpha = \dfrac{1}{3}$,　極大値 $\dfrac{4}{27}$

(ii) $f(0) = 0,\ f'(0) = 1$ より, 点 $(0,\ 0)$ での接線の式は $y = x$ となる。$y = x$ と $y = x^3 - 2x^2 + x$ との交点を求めると $x^2(x-2) = 0$ を解いて $x = 0,\ 2$ となることから $(0,\ 0)$ と $(2,\ 2)$ である。したがって, 囲まれた部分の面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \left(x - \left(x^3 - 2x^2 + x\right)\right) dx \\ &= \int_0^2 \left(-x^3 + 2x^2\right) dx \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3\right]_0^2 = -4 + \frac{16}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$



答　$\dfrac{4}{3}$

⑯　数　学

I

(i) (1) $6\sqrt{2}$　(2) $\dfrac{2+3\sqrt{2}+\sqrt{22}}{3}$

(ii) (3) $\dfrac{14}{225}$　(4) $\dfrac{22}{225}$

(iii) (5) $3a-5$　(6) $-1,\ 7$

II

(i) (1) $\left(\sqrt{2},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$　(2) $\dfrac{\pi}{8}$

(ii) (3) $2\sqrt{2}$　(4) 8

III

(i) 曲線 C について,

$y=-x^3+x^2+2x=-x(x+1)(x-2)$

$y'=-3x^2+2x+2$ である。

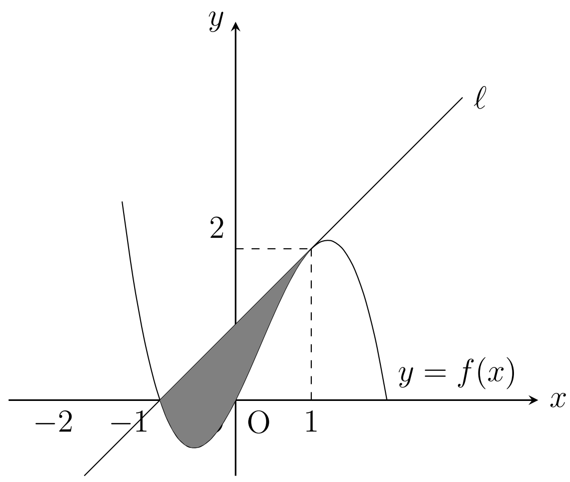
接線の傾きが 1 であることから接点の x 座標 x を求めると $-3x^2+2x+2=1$ を解いて $x=1,-\dfrac{1}{3}$ となる。

$x=-\dfrac{1}{3}$ のとき, $y=-\dfrac{14}{27}$ となるので ℓ の式に代入して $a=\dfrac{1}{3}-\dfrac{14}{27}=-\dfrac{5}{27}<0$ となって不適である。$x=1$ のとき, $y=2$ であるから ℓ の式に代入して $a=1>0$ を得る。したがって $a=1$ である。

答 $a=1$

(ii) 曲線 C と直線 ℓ の位置関係は下図のようになっているから求める面積は

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^{1}\left\{x+1-(-x^3+x^2+2x)\right\}dx \\
&= \int_{-1}^{1}(x^3-x^2-x+1)dx \\
&= \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{1} \\
&= -\frac{1-(-1)}{3}+1-(-1)=\frac{4}{3}
\end{aligned}$$



答 $\dfrac{4}{3}$

⑰　数　学

I

(i) (1) 0　(2) 2

(ii) (3) $(x+1)^2+(y-2)^2=25$　(4) 1

(iii) (5) $\dfrac{2}{7}$　(6) $\dfrac{53}{126}$

II

(i) (1) $8,\quad \dfrac{1}{2}$　(2) -1

(ii) (3) $16-b$　(4) 11

III

(i) $y=f(x)$ は点 $(2,\,0)$ を通るから，$f(2)=8+4p+2q=0$ から $2p+q+4=0$ となる。$f'(x)=3x^2+2px+q$ より $f'(-1)=3-2p+q$, また $f(-1)=-1+p-q$ から点 $(-1,\,f(-1))$ での C の接線の方程式は

$$y=(3-2p+q)(x+1)+(-1+p-q)$$

となる。これが点 $(2,\,0)$ を通るから

$$\begin{aligned}0&=3(3-2p+q)+(-1+p-q)\\&=9-6p+3q-1+p-q\\&=8-5p+2q\end{aligned}$$

となる。したがって連立一次方程式

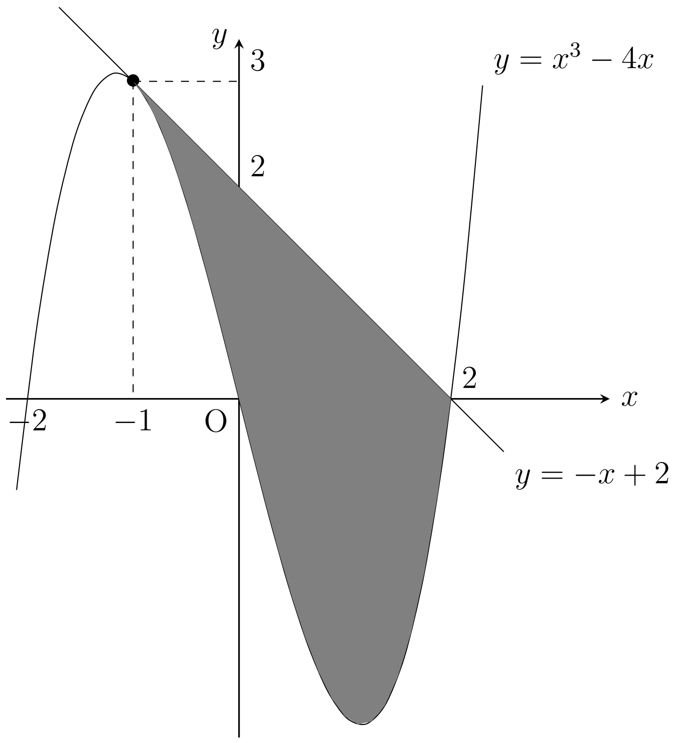
$$\begin{cases}2p+q &=-4\\ 5p-2q &=8\end{cases}$$

を解いて $p=0,\,q=-4$ を得る。

答 $p=0,\quad q=-4$

(ii) (i) から接線の式は $y=-x+2$ となる。これが点 $(-1,\,3)$ で $f(x)=x^3-4x$ に接する。またこの接線は点 $(2,\,0)$ を通るから，C と ℓ で囲まれた部分は下図のようになり，囲まれた部分の面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^{2}\left\{(-x+2)-(x^3-4x)\right\}dx\\&=\int_{-1}^{2}(-x^3+3x+2)dx=\left[-\frac{x^4}{4}+3\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}\\&=\left(-\frac{16}{4}+3\cdot\frac{4}{2}+4\right)-\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-2\right)\\&=-4+6+4+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2=8+\frac{1-6}{4}=8-\frac{5}{4}=\frac{27}{4}\end{aligned}$$



答 $\dfrac{27}{4}$

⑱　数　学

I

(i) (1) -3　　(2) $a > 1$

(ii) (3) 60　　(4) 3

(iii) (5) 35　　(6) 9240

II

(i) (1) $5+\sqrt{a^2-2a+10}$　　(2) 8

(ii) (3) $-\dfrac{11}{2}$　　(4) $\dfrac{4\pi}{3},\quad \dfrac{5\pi}{3}$

III

(i) 曲線 $C : y = f(x) = |x-4|(x+4)$ は

$$y = \begin{cases} x^2-16 & (x \geqq 4) \\ 16-x^2 & (0 < x \leqq 4) \end{cases}$$

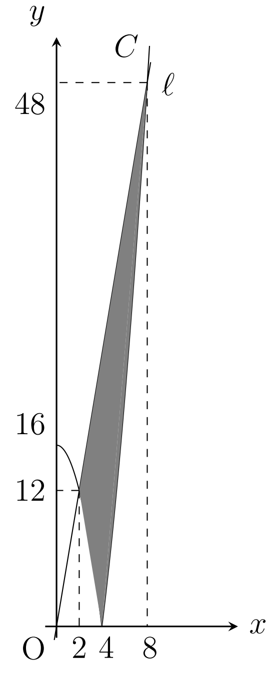
である。$x \geqq 4$ の範囲での ℓ との交点の x 座標は $x^2-16 = 6x$ を解いて $x = 8$ であり, $0 < x \leqq 4$ の範囲での ℓ との交点の x 座標は $16-x^2 = 6x$ を解いて $x = 2$ である。したがって交点の座標はそれぞれ, $(2,\,12)$, $(8,\,48)$ である。

答 $(2,\,12),\quad (8,\,48)$

(ii) C と ℓ とで囲まれる図形の面積 S は上底の長さ $f(2) = 12$, 下底の長さ $f(8) = 48$, 高さが $8-2 = 6$ の台形の面積 $S_1 = \dfrac{1}{2}(12+48)\cdot 6 = 180$ から, 直線 $x=2$, 直線 $x=8$, x 軸, および曲線 C とで囲まれた部分の面積 S_2 を引けばよいので

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_2^4 (16-x^2)dx + \int_4^8 (x^2-16)dx \\ &= \left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_2^4 + \left[\frac{x^3}{3} - 16x\right]_4^8 \\ &= 16\cdot 2 - \frac{1}{3}(4^3-2^3) + \frac{1}{3}(8^3-4^3) - 16(8-4) \\ &= \frac{8^3-4^3-4^3+2^3}{3} - 16\cdot 2 = \frac{392}{3} - 32 = \frac{296}{3} \end{aligned}$$

より $S = S_1 - S_2 = 180 - \dfrac{296}{3} = \dfrac{244}{3}$ である。



答 $\dfrac{244}{3}$