

21 数 学

●理学部(応用数学科, 物理科学科【物理重視型】, 化学科【化学重視型】, 地球圏科学科) ●薬学部

I

(i) (1) $\frac{17}{1000}$

(ii) (3) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

(iii) (5) (1, 5)

(2) $\frac{14}{17}$

(4) $-\frac{1}{3}$

(6) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

II

(i) (1) -4

(ii) (3) 19603

(2) $4x^2 - 10\sqrt{3}x - 6$

(4) 3439

【理学部(応用数学科, 物理科学科【物理重視型】)]

III

(i) 接点の x 座標を α とおく.

$f'(x) = \sin x + x \cos x$

より, 接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (\sin \alpha + \alpha \cos \alpha)(x - \alpha) + \alpha \sin \alpha \\ &= (\sin \alpha + \alpha \cos \alpha)x - \alpha^2 \cos \alpha \end{aligned}$$

とおける.
この接線は原点を通るので,

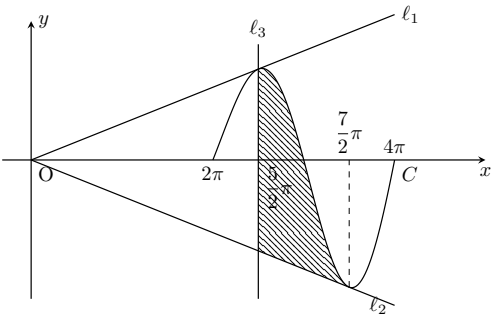
$$\alpha^2 \cos \alpha = 0$$

を満たす. $2\pi \leq \alpha \leq 4\pi$ より $\alpha = \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi$ となる.
よって, ℓ_1 の式は $y = x$, ℓ_2 の式は $y = -x$ となる.

(ii) $x \sin x \geq -x$ より, 求める面積は下の図の斜線部となる. よって, 求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{\frac{5}{2}\pi}^{\frac{7}{2}\pi} (x \sin x - (-x)) dx &= \left[-x \cos x + \sin x + \frac{x^2}{2} \right]_{\frac{5}{2}\pi}^{\frac{7}{2}\pi} \\ &= -2 + 3\pi^2 \end{aligned}$$

となる.



答 $\ell_1 : y = x, \ell_2 : y = -x$

答 $3\pi^2 - 2$

【理学部（地球圏科学科，化学科【化学重視型】），薬学部】

Ⅲ

(i) $x < -1$ において

$$f'(x) = 2(x+1)$$

だから ℓ_1 の方程式を

$$y = 2(s+1)(x-s) + (s+1)^2$$

とおく. ℓ_1 は $(0, -3)$ を通るから

$$-2s(s+1) + (s+1)^2 = -s^2 + 1 = -3$$

を満たす. $s < -1$ より $s = -2$ となる. よって, ℓ_1 の式は $y = -2x - 3$ となる.

$x \geq 0$ において

$$f'(x) = 2x$$

だから ℓ_2 の方程式を

$$y = 2t(x-t) + t^2$$

とおく. ℓ_2 は $(0, -3)$ を通るから

$$-2t^2 + t^2 = -t^2 = -3$$

を満たす. $t > 0$ より $t = \sqrt{3}$ となる. よって, ℓ_2 の式は $y = 2\sqrt{3}x - 3$ となる.

答 $\ell_1 : y = -2x - 3, \ell_2 : y = 2\sqrt{3}x - 3$

(ii) C と $y = -3$, $x = -2$, $x = \sqrt{3}$ で囲まれた部分の面積は

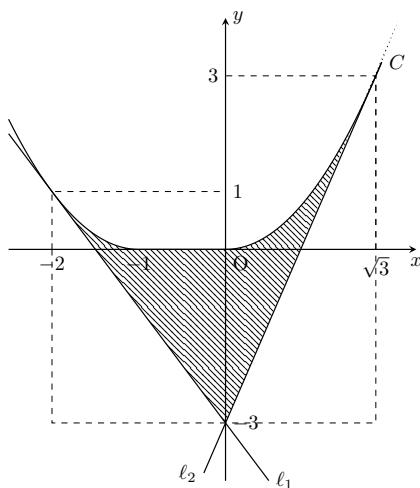
$$\begin{aligned} & \int_0^{\sqrt{3}} x^2 dx + \int_{-2}^{-1} (x+1)^2 dx - \int_{-2}^{\sqrt{3}} (-3) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\sqrt{3}} + \left[\frac{1}{3} (x+1)^3 \right]_{-2}^{-1} + 3(2 + \sqrt{3}) \\ &= \frac{19}{3} + 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

である.

求める面積は上の面積から, ℓ_1 , ℓ_2 , $y = -3$, $x = -2$, $x = \sqrt{3}$ で囲まれてできる2つの三角形の面積を除いたものに等しいので

$$\left(\frac{19}{3} + 4\sqrt{3} \right) - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 6 = \frac{7}{3} + \sqrt{3}$$

となる.



答 $\frac{7}{3} + \sqrt{3}$

22 数 学

●理学部(社会数理・情報インスティテュート, 物理科学科, 化学科)

I

$x \leq -5, \quad \frac{5}{3} \leq x$

(i) (1) _____

$-\frac{1}{9}$

(ii) (3) _____

$-\frac{13}{6}$

(iii) (5) _____

$x \leq -5, \quad \frac{5}{3} \leq x < \frac{1+3\sqrt{2}}{3}$

(2) _____

$3+2\log_3 2$

(4) _____

$\frac{5}{41}\sqrt{41}$

(6) _____

II

144

(i) (1) _____

$\sqrt{3}$

(ii) (3) _____

72

(2) _____

$(-3, 1), \left(3, -\frac{1}{2}\right)$

(4) _____

【理学部（物理科学科）】

III

(i)

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

より, $f(x)$ の増減表は以下の通り.

x	0	...	1	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	↗	極大	↘

$x \geq 0$ において $f(x)$ は $x=1$ で極大値をとる.
よって, 求める極大値は $f(1)=1$ となる.

(ii)

$$\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{2}x = \frac{x(3-x^2)}{2(x^2+1)}$$

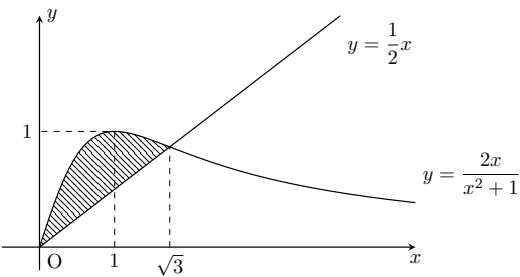
より, 曲線と直線の交点の x 座標は $x=0, \sqrt{3}$ となる.
また, $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ において

$$\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{2}x \geq 0$$

だから, 求める面積は下の図の斜線部となる.
よって, 求める面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{2}x \right) dx &= \left[\log(x^2+1) - \frac{1}{4}x^2 \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= 2\log 2 - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

となる.



極大値 1 ($x=1$)
答 _____

$2\log 2 - \frac{3}{4}$
答 _____

【理学部（社会数理・情報インスティテュート，化学科）】

Ⅲ

(i) 接点を (a, a^2) とすると求める接線の式は

$$y = 2a(x - a) + a^2 = 2ax - a^2$$

と表せる．接線は $(3, 5)$ を通るから

$$-a^2 + 6a = 5$$

となる．よって， $a = 1, 5$ を得る．

$a = 1$ のとき，接点は $(1, 1)$ であり，求める接線の方程式は

$$y = 2x - 1$$

となる．

$a = 5$ のとき，接点は $(5, 25)$ であり，求める接線の方程式は

$$y = 10x - 25$$

となる．

(ii) 線分 PQ が通過する領域は， $Q(3, 5)$ と $(-3, 9)$ を結ぶ直線 ℓ ， $-3 \leq x \leq 1$ の範囲の C ，および接線 $y = 2x - 1$ ($1 \leq x \leq 3$) で囲まれた部分（下の図の斜線部）である．ここで， ℓ の方程式は

$$y = -\frac{2}{3}x + 7$$

である．

点 Q ， $(1, 1)$ ， $(1, \frac{19}{3})$ を頂点とする三角形の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(-\frac{2}{3} \cdot 1 + 7 \right) - 1 \right\} \cdot (3 - 1) = \frac{16}{3}$$

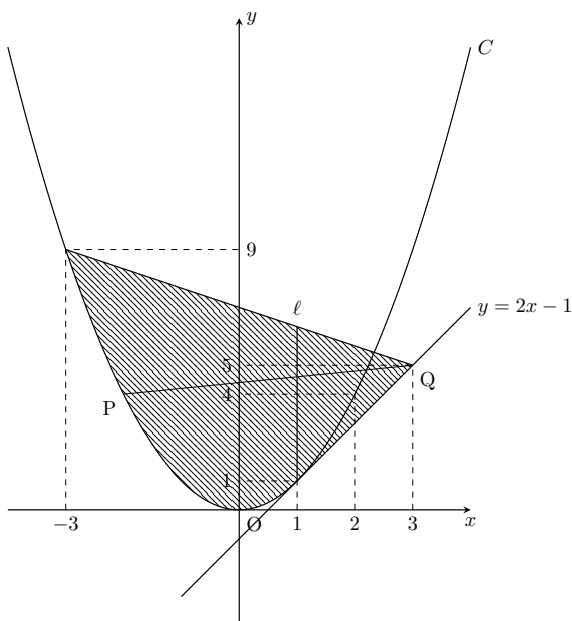
である．

$-3 \leq x \leq 1$ における斜線部の面積は

$$\begin{aligned} \int_{-3}^1 \left(-\frac{2}{3}x + 7 - x^2 \right) dx &= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 7x \right]_{-3}^1 \\ &= \frac{64}{3} \end{aligned}$$

である．

よって，求める面積は $\frac{16}{3} + \frac{64}{3} = \frac{80}{3}$ となる．



接線 $y = 2x - 1$ ，接点 $(1, 1)$
接線 $y = 10x - 25$ ，接点 $(5, 25)$

答

$\frac{80}{3}$

答

23 数 学

●工学部(機械工学科, 電子情報工学科, 社会デザイン工学科)

I

$-2 < x \leq -1$

$a < 19$

(i) (1) _____

(2) _____

$\frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

$\frac{50}{3}$

(ii) (3) _____

(4) _____

$\left(2, \frac{5}{6}\pi\right)$

$(-8, -8\sqrt{3})$

(iii) (5) _____

(6) _____

II

$\frac{37}{60}$

$\frac{10}{37}$

(i) (1) _____

(2) _____

$m \leq -3, \quad \frac{1}{3} \leq m$

$10 + \frac{15}{2}\pi$

(ii) (3) _____

(4) _____

III

(i)

$$f'(x) = \frac{-(-\sin x)\sin x + (2 + \cos x)\cos x}{(2 + \cos x)^2}$$
$$= \frac{1 + 2\cos x}{(2 + \cos x)^2}$$

より, $0 \leq x \leq \pi$ において

$$f'(x) = 0 \iff \cos x = -\frac{1}{2} \iff x = \frac{2}{3}\pi$$

となる.

よって, $f(x)$ の増減表は以下の通り.

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

特に $x = \frac{2}{3}\pi$ のとき, 最大値

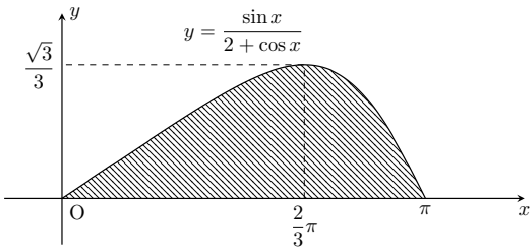
$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

をとる.

(ii) $0 \leq x \leq \pi$ において $f(x) \geq 0$ であるから,
求める面積は下の図の斜線部となる.
よって, 求める面積は

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx = -\int_0^\pi \frac{1}{2 + \cos x} (2 + \cos x)' dx$$
$$= -\left[\log |2 + \cos x|\right]_0^\pi$$
$$= \log 3$$

となる.



最大値 $\frac{\sqrt{3}}{3} \left(x = \frac{2}{3}\pi\right)$

答 _____

$\log 3$

答 _____

24 数 学

●工学部(電気工学科, 化学システム工学科, 建築学科)

I

- (i) (1) $\frac{7}{5\sqrt{3}}$
- (ii) (3) $\frac{1}{3}$ (4) $-n - \frac{1}{2}$
- (iii) (5) $\frac{432}{2401}$ (6) $\frac{864}{2401}$

II

- (i) (1) $x + 2\sqrt{2}y - 1 = 0$ (2) $\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$
- (ii) (3) 41 (4) 4

III

(i)

$$\begin{aligned} f(2) &= \int_0^2 (e^{2x} - 4x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{2x} - 2x^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2} e^4 - \frac{17}{2}. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} f(t) &= \left[\frac{e^{tx}}{t} - tx^2 \right]_0^2 = \frac{e^{2t} - 1}{t} - 4t \\ &\text{となる. これを微分すると} \\ f'(t) &= \frac{(2t - 1)(e^{2t} - 2t - 1)}{t^2} \\ &\text{となる.} \\ g(t) &= e^{2t} - 2t - 1 \text{ とおくと} \\ g'(t) &= 2(e^{2t} - 1) \geq 0 \\ &\text{より, } t > 0 \text{ において } g(t) \text{ は単調増加である. よって,} \\ &g(t) > g(0) = 0 \text{ が成り立つ.} \\ &\text{これより, } t > 0 \text{ において} \\ f'(t) = 0 &\iff 2t - 1 = 0 \iff t = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる.
このとき, $f(t)$ の増減表は以下の通り.

t	0	...	$\frac{1}{2}$	...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって, $f(t)$ は極小値 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2e - 4$ をとる.

答 $\frac{1}{2}e^4 - \frac{17}{2}$

答 極小値 $2e - 4 \left(t = \frac{1}{2} \right)$

25 数 学

●理学部 ●工学部 ●薬学部

I

(i) (1) $\frac{2}{5}\sqrt{7}$

(2) $\frac{\sqrt{133}}{5}$

(ii) (3) $\frac{1}{5}$

(4) $\frac{5}{12}$

(iii) (5) $-\frac{3}{2}$

(6) $(0, -3)$

II

(i) (1) $-\frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{2}$

(2) $a < -3, \quad 1 < a$

(ii) (3) $3^n - 1$

(4) 220

【理学部（応用数学科，物理科学科），工学部】

III

(i)

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x+4}$$

より， $f(x)$ の増減表は以下の通り．

x	-4	...	-2	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$			極小	

よって， $f(x)$ は $x = -2$ で極小値

$$f(-2) = -2 - 2\log 2$$

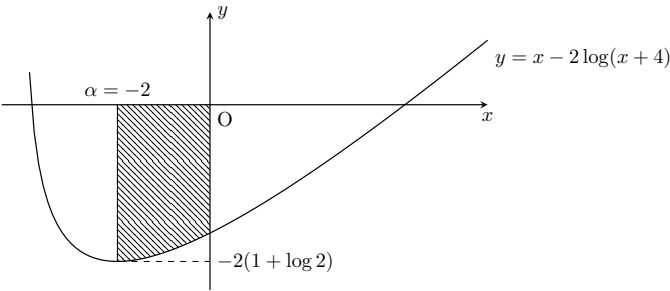
をとる．

(ii) 前問より $\alpha = -2$ である．

$-2 \leq x \leq 0$ において $f(x) \leq 0$ なので，求める面積は下の図の斜線部となる．よって，求める面積は

$$\begin{aligned} &\int_{-2}^0 (-x + 2\log(x+4))dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} + 2(x+4)\log(x+4) \right]_{-2}^0 - \int_{-2}^0 2dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} + 2(x+4)\log(x+4) - 2x \right]_{-2}^0 \\ &= 12\log 2 - 2 \end{aligned}$$

となる．



極小値 $-2 - 2\log 2$ ($x = -2$)
答 _____

$12\log 2 - 2$
答 _____

【理学部（社会数理・情報インスティテュート，化学科，地球圏科学科），薬学部】

Ⅲ

(i)

$$\begin{aligned} f(2) &= -\int_0^2 x(x-2)dx + \int_2^3 x(x-2)dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^2 + x^2\right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_2^3 \\ &= \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} f(t) &= -\int_0^t x(x-t)dx + \int_t^3 x(x-t)dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{t}{2}x^2\right]_0^t + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{t}{2}x^2\right]_t^3 \\ &= \frac{1}{3}t^3 - \frac{9}{2}t + 9. \end{aligned}$$

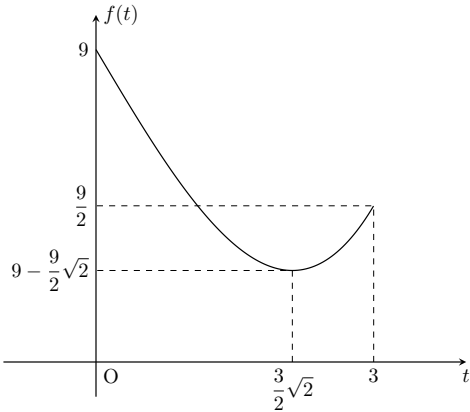
$f'(t) = t^2 - \frac{9}{2}$ より， $f(t)$ の増減表は以下の通り．

t	0	...	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$	...	3
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$		↘	極小	↗	

よって， $f(t)$ は $t = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ で最小値

$$f\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right) = 9 - \frac{9}{2}\sqrt{2}$$

を取る．また， $f(0) = 9$ ， $f(3) = \frac{9}{2}$ より， $f(t)$ は最大値 $f(0) = 9$ をとる．



答 $\frac{8}{3}$

最大値 9 ($x = 0$)
最小値 $9 - \frac{9}{2}\sqrt{2}$ ($x = \frac{3}{2}\sqrt{2}$)
答