㊻ 数　　学

●理学部　●工学部

Ⅰ

(i) (1) $-a+8$　(2) 4

(ii) (3) $(\sqrt{3},1,2)$　(4) 3

(iii) (5) 252　(6) 341

(iv) (7) 65　(8) 15

【理学部（応用数学科，物理科学科，工学部）】

Ⅱ

(i) $f(x)$ を微分して

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+a)e^x+(x^2+ax+b)e^x \\ &= \{x^2+(a+2)x+(a+b)\}e^x \end{aligned}$$

となる．

$f(x)$ が $x=-1,2$ で極値をとるとき

$$f'(-1)=f'(2)=0$$

でなければならない．$e^x>0$ より

$$b-1=0,\quad 3a+b+8=0$$

となる．これを解くと

$$(a,b)=(-3,1)$$

となる．

逆に $(a,\,b)=(-3,\,1)$ のとき

$$f'(x)=(x+1)(x-2)e^x$$

となり，$f(x)$ は $x=-1$ で極大，$x=2$ で極小となる．

答 $(a,b)=(-3,1)$

(ii)

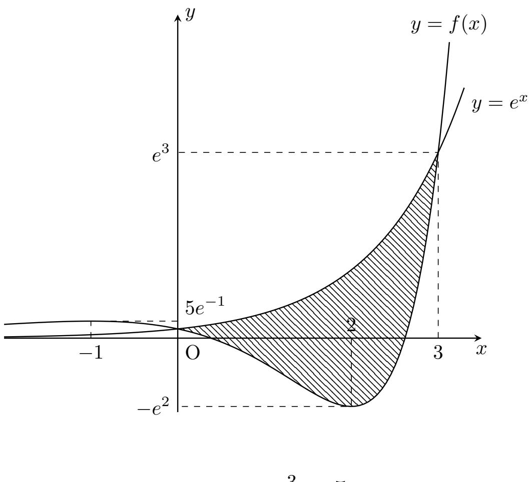
$$f(x)-e^x=(x^2-3x)e^x$$

より，曲線 $y=f(x)$ は $x=0,3$ で $y=e^x$ と交わる．$0\leq x\leq 3$ において $f(x)\leq e^x$ であるから，求める面積は下の図の斜線部となる．

よって，求める面積は

$$\begin{aligned} \int_0^3(-x^2+3x)e^x dx &= \left[\Big((-x^2+3x)+(2x-3)-2\Big)e^x\right]_0^3 \\ &= \left[(-x^2+5x-5)e^x\right]_0^3 \\ &\quad \text{(部分積分を2回行った)} \\ &= e^3+5 \end{aligned}$$

となる．



答 e^3+5

【理学部（社会数理・情報インスティテュート，化学科，地球圏科学科】

Ⅱ

(i)

$$g(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 1$$

とおく．

$$g'(x) = 3x^2 - 10x + 8 = (3x-4)(x-2)$$

より $g(x)$ の増減表は以下の通り．

x	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，曲線 C は下の図の通りとなる．

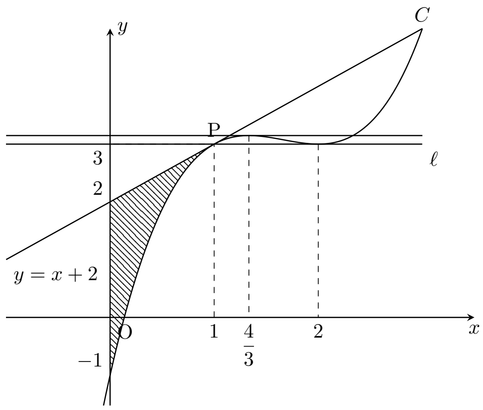
　C と ℓ の共有点の個数が 2 のとき，ℓ は C と $x = \dfrac{4}{3}$ で接するか，$x = 2$ で接するかのいずれかとなる．

　ℓ が C と $x = \dfrac{4}{3}$ で接するとき，$a = g\left(\dfrac{4}{3}\right)$ となる．ℓ が C と $x = 2$ で接するとき，$a = g(2)$ となる．

　$g\left(\dfrac{4}{3}\right) > g(2)$ より，求める a の値は

$$a = g(2) = 3$$

となる．



答　3

(ii) C と ℓ の共有点の x 座標は

$$(x^3 - 5x^2 + 8x - 1) - 3 = (x-1)(x-2)^2$$

より，$x = 1, 2$ である．

よって，$\mathrm{P}\,(1, 3)$ である．

　$g'(1) = 1$ より，C の P における接線の方程式は

$$y = (x-1) + 3 = x + 2$$

である．

　$0 \leq x \leq 1$ のとき

$$(x^3 - 5x^2 + 8x - 1) - (x+2) = (x-1)^2(x-3) \leq 0$$

だから，求める面積は左下の図の斜線部となる．

　よって，求める面積は

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (-x^3 + 5x^2 - 7x + 3)\,dx \\
&= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 3x\right]_0^1 \\
&= \frac{11}{12}
\end{aligned}$$

となる．

答　$\dfrac{11}{12}$